Τρίτη, 19 Δεκεμβρίου 2017

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ-ΘΑΝΑΤΩΝ

Θεωρούμε μια σ.δ. σε συνεχή χρόνο $\{X(t): 0 \leq t < +\infty\}$ και με τιμές στον μη
ρνητικό ημιάξονα των ακεραίων, δηλ. $S=\{0,1,2,\dots\}$. Άρα είναι σ.δ.
σε <u>συνεχή χρόνο</u> με <u>διακριτό χώρο καταστάσεων</u>.

$P_{ij}(t) = P[X(t+u)=j \mid X(u)=i]$ η πιθανότητα να "πάω" $i \to j$ σε χρόνο t

Υποθέσεις Που Σχετίζονται Με Τις Αλλαγές Των Καταστάσεων

(1η) Έστω τη χρον. στιγμή t η σ.δ. βρίσκεται στην κατάσταση n ($n=0,1,\dots$). Η πιθανότητα να βρεθεί στην $n+1$ τη χρον. στιγμή $t+dt$ (όπου dt η μετ/τη του χρονικού διαστήματος και είναι πολύ μικρή)

$$P_{n\,n+1}(dt) \underset{=}{\text{υποθ.}} \lambda_n dt + o(dt)$$

λ_n → μία θετική παράμετρος που μου δίνει ρυθμό γεννήσεων που εξαρτάται από τον πληθυσμό

(2η) Έστω τη χρ. στιγμή t η σ.δ. βρίσκεται στη κατάσταση n. Η πιθανότητα να βρεθεί στην $n-1$ τη χρ. στιγμή $t+dt$

$$P_{n\,n-1}(dt) \underset{=}{\text{υποθ.}} \mu_n dt + o(dt)$$

μ_n → μία θετική παράμετρος που μου δίνει τον ρυθμό θανάτων

Συμπεράσματα

(1) $P_{n\,n+1}(dt) = \lambda_n dt + o(dt)$ ← 1 ακριβώς γέννηση

(2) $P_{n\,n-1}(dt) = \mu_n dt + o(dt)$ ← 1 ακριβώς θάνατος

(3) Δεδομένου ότι η σ.δ. βρίσκεται τη χρον. στιγμή t στην κατάσταση n, η πιθανότητα ο συνολικός αριθμός γεννήσεων-θανάτων (δηλ. των γεγονότων) που θα συμβούν στο $(t+dt)$ να είναι μεγαλύτερο του 1, είναι $o(dt)$.

Ερμηνεία

Στο dt θα έχω είτε 1 ακριβώς γέννηση, είτε 1 ακριβώς θάνατο, είτε ούτε γέννηση-θάνατο $o(dt)$

Άρα, $P_{nj}(dt) = o(dt)$, για $j \neq n, n+1, n-1$

$$P_{nn}(dt) = 1 - [(\lambda_n + \mu_n)dt + o(dt)], \quad n = 1, 2, \dots$$

$$P_{00}(dt) = 1 - \sum_{j \in 1,2,\dots} P_{0j}(dt) = 1 - P_{01}(dt) + o(dt) = 1 - [\lambda_0 dt + o(dt)]$$

Ερώτημα: Έστω τη χρ. στιγμή 0 η κατάσταση της διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων είναι στην κατάσταση i, δηλ. $X(0) = i$. Ζητάμε την

$P_{in}(t) = P(X(t) = n \mid X(0) = i)$, δηλ. να πάω από το $i \to n$ σε χρόνο t.

$P_n(t+dt) = P$ [να έχει βρεθεί στην κατάσταση $n-1$ τη χρονική στιγμή t δοθέντος ότι ξεκίνησε από το $X(0)=i$ και από το $n-1 \to n$ σε dt (A_1)

ή

να έχει βρεθεί στην κατάσταση $n+1$ τη χρονική στιγμή t δοθέντος ότι ξεκίνησε από το $X(0)=i$ και από το $n+1 \to n$ σε dt (A_2)

ή

να έχει βρεθεί στην κατάσταση n τη χρονική στιγμή t δοθέντος ότι ξεκίνησε από το $X(0)=i$ και από το $n \to n$ σε dt (A_3)

ή

να βρεθεί στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή t με $X(0)=i$ και από $j \to n$ σε dt με $j \neq n,\ j \neq n+1,\ j \neq n-1$ (A_4)] $= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = P(A_{11} \cap A_{12}) + P(A_{21} \cap A_{22}) + P(A_{31} \cap A_{32}) + P(A_{41} \cap A_{42}) =$$

$$= P_{n-1}(t) \cdot \overbrace{\cancel{P_{n-1,n}(dt)}}^{\lambda_{n-1} dt + o(dt)} + P_{n+1}(t)\left[\mu_{n+1} dt + o(dt)\right] + P_n(t)\left[1 - (\mu_n + \lambda_n) dt + o(dt)\right] +$$

$$+ \sum_{j \neq n, n+1, n-1} P_j(t)\, o(dt) \qquad (1)$$

$P_0(t+dt) = P\Big[$ να έχει βρεθεί στην 1 τη χρ.στ. t
με $X(0)=i$ και από $1 \to 0$ σε dt (B_1)
ή
να έχει βρεθεί στην 0 τη χρ.στ. t
με $X(0)=i$ και από $0 \to 0$ σε dt (B_2)
ή
να έχει βρεθεί στην j τη χρ.στ. t
με $X(0)=i$ και από $j \to n$ σε dt (B_3) $\Big] = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) =$

$$= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = P(B_{11} \cap B_{12}) + P(B_{21} \cap B_{22}) + P(B_{31} \cap B_{32}) =$$

$$= P_1(t)\underbrace{[\mu_1 dt + o(dt)]}_{P_{10}(dt)} + P_0(t)\underbrace{[1 - \lambda_0 dt + o(dt)]}_{P_{00}(dt)} + \sum_{j \neq 0,1} P_j(t)\, o(dt) \quad (2)$$

$$\frac{P_n(t+dt)}{dt} = P_{n-1}(t)\cdot\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n+1} + \frac{P_n(t)}{dt} - P_n(t)(\lambda_n + \mu_n) \Rightarrow$$

$$\frac{P_n(t+dt) - P_n(t)}{dt} + (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda_n + \mu_n)P_n(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) \quad (3)$$

(Διαιρώ την (2) με dt) $\dfrac{P_0(t+dt) - P_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t) \Rightarrow$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t) \quad (4)$$

2ο ΕΡΩΤΗΜΑ: Εύρεση Οριακών Πιθανοτήτων

Συμβολίζω με $\bar{P}_n$, την πιθανότητα μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα να έχω n άτομα στο σύστημα, ενώ έχω ξεκινήσει από i άτομα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} = 0$$

Παίρνω όριο στην ③ $\Rightarrow (\lambda_n+\mu_n)\bar{P}_n = \lambda_{n-1}\bar{P}_{n-1} + \mu_{n+1}\bar{P}_{n+1}$ ⑤

Παίρνω όριο στη ④ $\Rightarrow \lambda_0 \bar{P}_0 = \mu_1 \bar{P}_1$ ⑥

Η ⑥ δίνει: $\bar{P}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\bar{P}_0$ ⑦

Η ⑤, για n=1, δίνει: $(\lambda_1+\mu_1)\bar{P}_1 = \lambda_0\bar{P}_0 + \mu_2\bar{P}_2 \Rightarrow$

$\lambda_1\bar{P}_1 + \cancel{\mu_1\bar{P}_1} = \cancel{\lambda_0\bar{P}_0} + \mu_2\bar{P}_2 \Rightarrow \bar{P}_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\bar{P}_1 \overset{7}{\Longrightarrow} \bar{P}_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\bar{P}_0$ ⑧

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο $\bar{P}_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}\bar{P}_0$, n=1,2,3,

Πρέπει να προσδιορίσουμε το $\bar{P}_0$: $\sum_{n=0}^{+\infty}\bar{P}_n = 1 \Rightarrow$

$$\bar{P}_0\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}\right] = 1 \Rightarrow \bar{P}_0 = \left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}\right]^{-1}$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Θεωρείστε τηλ. κέντρο με n ~~[illegible]~~ γραμμές

Η διάρκεια του τηλεφωνήματος ακολουθεί Εκθ(μ)

Οι κλήσεις σε αυτό το τηλ. κέντρο γίνονται με Poisson(λ)

Όταν ένας συνδρομητής βρίσκει όλες τις γραμμές κατειλημμένες, δεν μπορεί να μπεί στο σύστημα και χάνεται

Να προσδιοριστεί, μετά από μεγάλο χρον. διάστημα, ποια η πιθανότητα ένας συνδρομητής να βρει όλες τις γραμμές κατειλ.

-Εστω $X(t)$ η σ.δ. που παριστανει τον αριθμό των πελατών στο τηλ. κεντρο τη χρονική στιγμή t, με $0 \leq t \leq +\infty$

Σ.Δ. σε συνεχή χρονο με διακριτό χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

-Εστω $\bar{P}_n$ η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα μετά από πολύ μεγάλο χρονο t

Ζητάει την πιθανότητα $\bar{P}_m$

$$P\left(\begin{matrix}\text{να έχω μια αφιξη}\\ \text{σε χρόνο } dt\end{matrix}\right) = \frac{e^{-\lambda dt}(\lambda dt)^1}{1!} = e^{-\lambda dt} \cdot \lambda dt = \lambda dt \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda dt)^n}{n!} =$$

$$= \lambda dt \left(1 - \frac{\lambda dt}{1!} + \frac{(\lambda dt)^2}{2!} + \dots\right) = \lambda dt + o(dt)$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Ψάχνω το μ_n

Ο ρυθμός θανάτου ειναι $\mu_n = n \cdot \mu$

Λόγω της μοντελοποίησης με την Poisson, δεν μπορούν να συμβούν περισσότερα του ενός γεγονότα σε χρονικό διάστημα dt.

Άρα, $P_{nj}(dt) = o(dt)$, για $j \neq n, n+1, n-1$

$$\bar{P}_m = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \bar{P}_0 \Rightarrow \bar{P}_m = \frac{\lambda^m}{1\mu\, 2\mu \dots m\mu} \bar{P}_0 \Rightarrow \bar{P}_m = \frac{\lambda^m}{\mu^m\, m!} \bar{P}_0 \,,$$

με $$\bar{P}_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right]^{-1}$$